

К КИНЕМАТИКЕ КАРДАНОВА ПОДВЕСА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГИРОСТАБИЛИЗАТОРА

Ю. М. КАМАСHEB

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры
гироскопических приборов и устройств)

В статье определяется связь между ошибками стабилизации платформы, отсчитанными относительно осей подвеса и относительно отсчетной системы координат. Приводятся выражения для проекции абсолютных скоростей вращения колец подвеса и платформы с учетом вращения основания.

В опубликованных работах [1, 2, 3, 4 и др.] даются различные методы определения проекций абсолютных скоростей вращения механических элементов пространственного гиростабилизатора и различные способы задания ошибок стабилизации платформы. Целесообразно получить более общие выражения для скоростей вращения и найти связь между различными вариантами ошибок стабилизации.

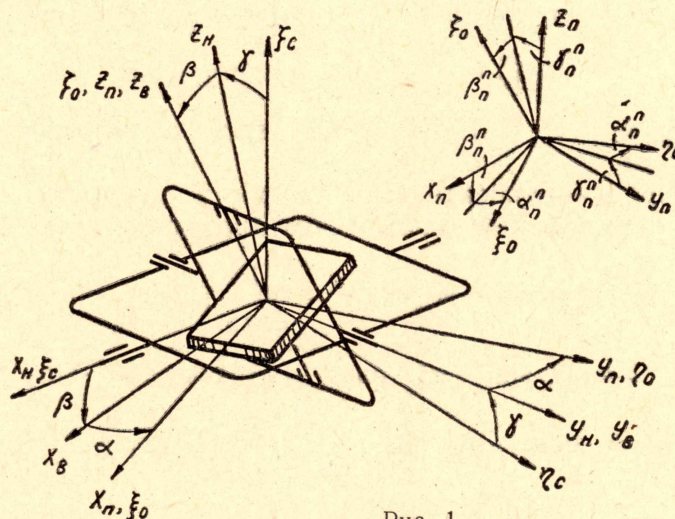


Рис. 1

Выберем следующие правые ортогональные системы координат (рис. 1). ξ_c, η_c, ζ_c , x_n, y_n, z_n , x_b, y_b, z_b , x_p, y_p, z_p , жестко связанные соответственно с подвижным основанием, наружным (НК), внутренним (ВК) кольцами подвеса и платформой (П); систему координат ξ_0, η_0, ζ_0 назовем отсчетной, эта система координат моделируется стабилизированной платформой на подвижном основании и в частном случае может быть неподвижной.

Систему координат $\xi_c \eta_c \zeta_c$ будем считать начальной, а систему $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ — конечной. Взаимное положение систем координат $\xi_c \eta_c \zeta_c$, $x_n y_n z_n$, $x_b y_b z_b$, $x_n y_n z_n$ определим углами γ , β , α их относительного поворота вокруг осей подвеса СС, ВВ, АА соответственно. Углы γ , β , α могут принимать любые значения. Положение отсчетной системы координат $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ относительно платформы определим углами α_n^p , β_n^p , γ_n^p . Эти углы малые и представляют ошибки стабилизации платформы в отсчетной системе координат. Оси платформы $x_n y_n z_n$ получили название осей стабилизации.

Проекции абсолютных скоростей вращения основания, НК ВК, П на их оси обозначим соответственно:

$$\omega_{\xi c}^c \quad \omega_{\eta c}^c \quad \omega_{\zeta c}^c, \quad \omega_{x_n}^n \quad \omega_{y_n}^n \quad \omega_{z_n}^n, \quad \omega_{x_b}^b \quad \omega_{y_b}^b \quad \omega_{z_b}^b, \quad \omega_{x_n}^p \quad \omega_{y_n}^p \quad \omega_{z_n}^p.$$

Проекции абсолютных скоростей вращения колец подвеса и платформы определяются очевидными соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_{x_n}^n &= \omega_{\xi c}^c + \dot{\gamma}, \\ \omega_{y_n}^n &= \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma, \\ \omega_{z_n}^n &= -\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \omega_{x_b}^b &= (\dot{\gamma} + \omega_{\xi c}^c) \cdot \cos \beta - (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) \sin \beta, \\ \omega_{y_b}^b &= \dot{\beta} + \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma, \\ \omega_{z_b}^b &= (\dot{\gamma} + \omega_{\xi c}^c) \cdot \sin \beta + (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) \cdot \cos \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \omega_{x_n}^p &= [(\dot{\gamma} + \omega_{\xi c}^c) \cdot \cos \beta - (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) \cdot \sin \beta] \cdot \cos \alpha + \\ &\quad + (\dot{\beta} + \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma) \cdot \sin \alpha, \\ \omega_{y_n}^p &= -[(\dot{\gamma} + \omega_{\xi c}^c) \cdot \cos \beta - (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) \cdot \sin \beta] \cdot \sin \alpha + \\ &\quad + (\dot{\beta} + \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma) \cdot \cos \alpha, \\ \omega_{z_n}^p &= \dot{\alpha} + (\dot{\gamma} + \omega_{\xi c}^c) \cdot \sin \beta + (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) \cdot \cos \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ — относительные скорости вращения колец подвеса, обусловленные вращением основания и платформы. Из (3) найдем:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_{z_n}^p - \operatorname{tg} \beta (\omega_{x_n}^p \cdot \cos \alpha - \omega_{y_n}^p \cdot \sin \alpha) - \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma), \\ \dot{\beta} &= \omega_{x_n}^p \cdot \sin \alpha + \omega_{y_n}^p \cdot \cos \alpha - (\omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_{x_n}^p \cdot \cos \alpha - \omega_{y_n}^p \cdot \sin \alpha) + \operatorname{tg} \beta (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) - \omega_{\xi c}^c. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключим из выражений (1), (2), (3) относительные скорости, подставив их значения из (4), получим:

$$\begin{aligned} \omega_{x_n}^n &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_{x_n}^p \cdot \cos \alpha - \omega_{y_n}^p \cdot \sin \alpha) + \operatorname{tg} \beta (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma), \\ \omega_{y_n}^n &= \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma, \\ \omega_{z_n}^n &= -\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\omega_{xB}^B &= \omega_{xП}^П \cdot \cos \alpha - \omega_{yП}^П \cdot \sin \alpha, \\ \omega_{yB}^B &= \omega_{xП}^П \cdot \sin \alpha + \omega_{yП}^П \cdot \cos \alpha,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\omega_{zB}^B = \operatorname{tg} \beta (\omega_{xП}^П \cdot \cos \alpha - \omega_{yП}^П \cdot \sin \alpha) + \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\xi c}^c \cdot \cos \gamma). \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\omega_{xП}^П &= \dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П, \\ \omega_{yП}^П &= \dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П, \\ \omega_{zП}^П &= \dot{\alpha}_П^П + \dot{\beta}_П^П \cdot \gamma_П^П.\end{aligned}\quad (7)$$

Для платформы получили очевидные тождественные равенства. С другой стороны, скорости вращения платформы в отсчетной системе координат определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}\omega_{xП}^П &= \dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П, \\ \omega_{yП}^П &= \dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П, \\ \omega_{zП}^П &= \dot{\alpha}_П^П + \dot{\beta}_П^П \cdot \gamma_П^П.\end{aligned}\quad (8)$$

Подставив значения проекций (8) абсолютной скорости вращения платформы в выражения (5) и (6), получим:

$$\begin{aligned}\omega_{xB}^B &= \frac{1}{\cos \beta} \cdot [(\dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П) \cdot \cos \alpha - (\dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П) \cdot \sin \alpha] + \\ &+ \operatorname{tg} \beta (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\xi c}^c \cdot \cos \gamma), \\ \omega_{yB}^B &= \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\xi c}^c \cdot \sin \gamma, \\ \omega_{zB}^B &= -\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\xi c}^c \cdot \cos \gamma.\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\omega_{xB}^B &= (\dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П) \cdot \cos \alpha - (\dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П) \sin \alpha, \\ \omega_{yB}^B &= (\dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П) \cdot \sin \alpha + (\dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П) \cos \alpha, \\ \omega_{zB}^B &= \operatorname{tg} \beta \cdot [(\dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П) \cdot \cos \alpha - (\dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П) \sin \alpha] + \\ &+ \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\xi c}^c \cdot \cos \gamma).\end{aligned}\quad (10)$$

Выражения (8), (9), (10) представляют собой проекции абсолютных скоростей вращения платформы, наружного и внутреннего кольца на их оси, выраженные через углы и скорости вращения платформы относительно отсчетной системы координат с учетом движения основания. При неподвижном основании эти выражения принимают вид, полученный в работе [4].

Так как моменты сопротивления в осях подвеса зависят от относительных скоростей вращения колец подвеса, то определим значения относительных скоростей (4) также через углы и скорости относительно отсчетной системы:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{\alpha}_П^П + \dot{\beta}_П^П \gamma_П^П - \operatorname{tg} \beta [(\dot{\gamma}_П^П + \dot{\alpha}_П^П \cdot \beta_П^П) \cos \alpha - (\dot{\beta}_П^П - \dot{\alpha}_П^П \cdot \gamma_П^П) \sin \alpha] - \\ &- \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\xi c}^c \cdot \cos \gamma),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= (\dot{\gamma}^n + \dot{\alpha}^n \cdot \beta^n) \cdot \sin \alpha + (\dot{\beta}^n - \dot{\alpha}^n \cdot \gamma^n) \cos \alpha - \\ &\quad - (\omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{\cos \beta} [(\dot{\gamma}^n + \dot{\alpha}^n \cdot \beta^n) \cos \alpha - (\dot{\beta}^n - \dot{\alpha}^n \cdot \gamma^n) \sin \alpha] + \\ &\quad + \operatorname{tg} \beta (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) - \omega_{\xi c}^c.\end{aligned}\quad (11)$$

Следуя [3], введем в рассмотрение углы поворота α^n , β^n , γ^n и скорости $\dot{\alpha}^n$, $\dot{\beta}^n$, $\dot{\gamma}^n$ платформы вокруг осей подвеса АА, ВВ, СС соответственно.

Углы α^n , β^n , γ^n — малые и представляют собой ошибки стабилизации платформы, отсчитанные вокруг осей подвеса. Скорости вращения платформы вокруг осей подвеса имеют очевидные значения:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^n &= \omega_{zп}^n, \\ \dot{\beta}^n &= \omega_{xп}^n \cdot \sin \alpha + \omega_{yп}^n \cdot \cos \alpha, \\ \dot{\gamma}^n &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_{xп}^n \cdot \cos \alpha - \omega_{yп}^n \cdot \sin \alpha).\end{aligned}\quad (12)$$

Откуда

$$\begin{aligned}\omega_{xп}^n &= \dot{\gamma}^n \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha + \dot{\beta}^n \cdot \sin \alpha, \\ \omega_{yп}^n &= -\dot{\gamma}^n \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + \dot{\beta}^n \cdot \cos \alpha, \\ \omega_{zп}^n &= \dot{\alpha}^n.\end{aligned}\quad (13)$$

Подставив значения (13) в (5) и (6), получим:

$$\begin{aligned}\omega_{xн}^н &= \dot{\gamma}^n + \operatorname{tg} \beta (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma), \\ \omega_{yн}^н &= \omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma, \\ \omega_{zн}^н &= -\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma.\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\omega_{xв}^в &= \dot{\gamma}^n \cdot \cos \beta, \\ \omega_{yв}^в &= \dot{\beta}^n, \\ \omega_{zв}^в &= \dot{\gamma}^n \cdot \sin \beta + \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma).\end{aligned}\quad (15)$$

Выражения (13), (14), (15) представляют собой проекции абсолютных скоростей вращения платформы, наружного и внутреннего кольца на их оси, выраженные через скорости вращения платформы вокруг осей подвеса с учетом движения основания.

Относительные скорости вращения (4) колец подвеса, выраженные через (13), имеют значения:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{\alpha}^n - \dot{\gamma}^n \cdot \sin \beta - \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma), \\ \dot{\beta} &= \dot{\beta}^n - (\omega_{\eta c}^c \cdot \cos \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^n + \operatorname{tg} \beta (-\omega_{\eta c}^c \cdot \sin \gamma + \omega_{\zeta c}^c \cdot \cos \gamma) - \omega_{\xi c}^c.\end{aligned}\quad (16)$$

Подставляя (8) в (12), определим связь между координатами $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \alpha_p^n, \beta_p^n, \gamma_p^n$ и скоростями:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^n &= \dot{\alpha}_p^n + \dot{\beta}_p^n \cdot \gamma_p^n, \\ \dot{\beta}^n &= (\dot{\gamma}_p^n + \dot{\alpha}_p^n \cdot \beta_p^n) \sin \alpha + (\dot{\beta}_p^n - \dot{\alpha}_p^n \cdot \gamma_p^n) \cos \alpha, \\ \dot{\gamma}^n &= (\dot{\gamma}_p^n + \dot{\alpha}_p^n \cdot \beta_p^n) \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} - (\dot{\beta}_p^n - \dot{\alpha}_p^n \cdot \gamma_p^n) \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}.\end{aligned}\quad (17)$$

Относительные скорости (4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{\alpha}_k^n + \dot{\alpha}_k^c, \\ \dot{\beta} &= \dot{\beta}_k^n + \dot{\beta}_k^c, \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_k^n + \dot{\gamma}_k^c,\end{aligned}\quad (18)$$

где $\dot{\alpha}_k^n, \dot{\beta}_k^n, \dot{\gamma}_k^n$ — скорости вращения колец подвеса, обусловленные вращением платформы, а составляющие — $\dot{\alpha}_k^c, \dot{\beta}_k^c, \dot{\gamma}_k^c$ — обусловлены вращением основания.

Как видно из (18), в случае движения основания относительные углы и скорости поворота колец подвеса не отражают ошибки стабилизации платформы.

Из (4) получим:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k^n &= \omega_{zp}^n - \operatorname{tg} \beta (\omega_{xp}^n \cdot \cos \alpha - \omega_{yp}^n \cdot \sin \alpha), \\ \dot{\beta}_k^n &= \omega_{xp}^n \cdot \sin \alpha + \omega_{yp}^n \cdot \cos \alpha, \\ \dot{\gamma}_k^n &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_{xp}^n \cdot \cos \alpha - \omega_{yp}^n \cdot \sin \alpha).\end{aligned}\quad (19)$$

Подставляя (12) в (19), получим:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_k^n &= \dot{\alpha}^n - \dot{\gamma}^n \cdot \sin \beta, \\ \dot{\beta}_k^n &= \dot{\beta}^n, \\ \dot{\gamma}_k^n &= \dot{\gamma}^n.\end{aligned}\quad (20)$$

При неподвижном основании соотношения (18) принимают вид:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{\alpha}_k^n, \\ \dot{\beta} &= \dot{\beta}_k^n, \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}_k^n\end{aligned}\quad (21)$$

Приравнивая (20) и (21), найдем:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \dot{\alpha}^n - \dot{\gamma}^n \cdot \sin \beta, \\ \dot{\beta} &= \dot{\beta}^n, \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^n,\end{aligned}\quad (22)$$

т. е. при неподвижном основании относительные углы поворота и скорости колец подвеса являются функциями ошибок стабилизации платформы, отсчитанных вокруг осей подвеса, и определяются соотношениями (22).

Для определения связи относительных скоростей при неподвижном основании с ошибками стабилизации относительно отсчетной системы координат в (22) следует подставить значение (17).

Выводы

1. При исследовании точности работы пространственного стабилизатора ошибки стабилизации платформы рассматриваются как относительно осей стабилизации или осей отсчетной системы, так и относительно осей подвеса платформы. Связь между ошибками стабилизации в первом и втором случаях определяется соотношениями (17).

2. При рассмотрении в качестве независимых переменных ошибок стабилизации в отсчетной системе координат уравнения движения стабилизатора следует составлять с использованием скоростей вращения, определяемых выражениями (8), (9), (10) и (11).

3. При рассмотрении в качестве независимых переменных ошибок стабилизации относительно осей подвеса платформы уравнения движения стабилизатора следует составлять с использованием скоростей вращения, определяемых выражениями (13), (14), (15) и (16).

4. При неподвижном основании в качестве независимых переменных в уравнениях движения стабилизатора можно использовать относительные углы поворота колец подвеса, имея в виду, что их связь с ошибками стабилизации платформы определяется соотношениями (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Ишлинский. Механика гироскопических систем. АН СССР, 1963.
 2. П. И. Саидов. Теория гироскопов, ч. 1. «Высшая школа», 1965.
 3. Д. С. Пельпор. Теория гироскопических стабилизаторов. «Машиностроение», 1965.
 4. А. С. Понырко, Л. А. Северов. Об инженерных методах составления уравнений движения пространственного гиросtabilизатора. Труды ЛИАП, вып. 49, 1966.
-